Hinweise zum Wahlteil

Im Wahlteil sind 68 Bewertungseinheiten (BE) von insgesamt 88 BE erreichbar.

Am Ende jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten angegeben.

Auswahl der Aufgaben

Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (34 BE)	Block 2 Stochastik (17 BE)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (17 BE)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.

Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

Auswahlzeit: 30 Minuten

Bearbeitungszeit: 175 Minuten

Hilfsmittel für den Wahlteil

1. Zeichenmittel
2. eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. von der Schule eingeführte, gedruckte Formelsammlung

Aufgabe 1A

Eine Minigolfbahn enthält als Hindernis eine Welle.
Die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 12x + 4{,}5$ beschreibt für $1 \le x \le 3$ modellhaft die Seitenansicht der Welle.
Für $x \le 1$ und $x \ge 3$ sind die Abschnitte der Bahn waagerecht und in der Seitenansicht durch die x-Achse gegeben. Alle Angaben haben die Einheit Meter (m).
Eine dreidimensionale Ansicht ist in Abbildung 1 dargestellt.

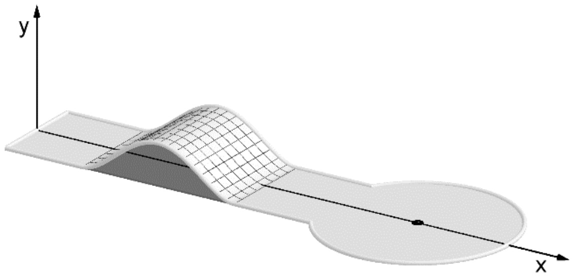


Abbildung 1

a) Bestimmen Sie die maximale Höhe der Bahn.
Untersuchen Sie, ob der Übergang zur Welle an der Stelle x = 1 sprung- und knickfrei ist.
Die größte Steigung der Bahn soll den Wert 0,8 nicht überschreiten.
Entscheiden Sie, ob die Minigolfbahn diese Bedingung erfüllt, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (11 BE)

b) Der Ball wird modellhaft als punktförmig angenommen. Bei einem festen Schlag hebt er am Punkt $P(1{,}42 \mid f(1{,}42))$ von der Bahn ab. Seine Flugbahn ab dem Punkt P kann näherungsweise durch die Parabel q mit $q(x) = -0{,}28x^2 + 1{,}56x - 1{,}42$ beschrieben werden.
Zeigen Sie, dass der Ball nicht direkt im Loch bei x = 5 landet.
Berechnen Sie den Winkel, unter dem der Ball auf die Bahn trifft.
Bestimmen Sie den maximalen vertikalen Abstand des Balles von der Welle. (11 BE)

c) Das Hindernis soll auf einer Seite verkleidet werden. Die Kosten der Verkleidung betragen pro Quadratmeter 40 €.
Berechnen Sie die Kosten für die Seitenverkleidung.
Die Seitenverkleidung soll so wie in Abbildung 2 dargestellt gestrichen werden.
Der zur Mitte der Verkleidung symmetrische Farbstreifen soll 0,3 m² groß sein.

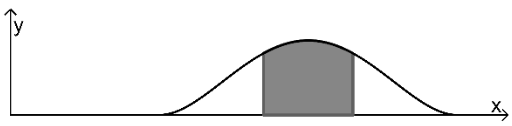


Abbildung 2

Erläutern Sie, dass man die Breite dieses Streifens mithilfe der Gleichung $\int_2^k f(x)\,dx = 0{,}15$ berechnen kann. (8 BE)

d) Unabhängig vom Sachzusammenhang gilt für eine nicht konstante ganzrationale Funktion g:
- Ihr Graph ist achsensymmetrisch zur Geraden mit x = 2.
- $g'(1) = 0$.

Entscheiden Sie, welchen Grad g mindestens haben muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (4 BE)

Aufgabe 1B

Beim maschinellen Lernen simuliert man das Verhalten von menschlichen Nervenzellen. Dabei entscheidet eine künstliche Zelle mithilfe einer sogenannten Aktivierungsfunktion, ob sie ein Signal ausgibt. Die Funktion f mit $f(x) = -0{,}25\,x^3 + 0{,}75\,x^2$, $0 \le x \le 2$, ist eine mögliche Aktivierungsfunktion. x wird als Eingangswert und f(x) als Aktivitätsmaß bezeichnet.

a) Berechnen Sie für den Eingangswert x = 0,5 das Aktivitätsmaß.
Markieren Sie in Abbildung 1 den Bereich auf der x-Achse, für den das Aktivitätsmaß mindestens 0,25 und höchstens 0,75 beträgt.

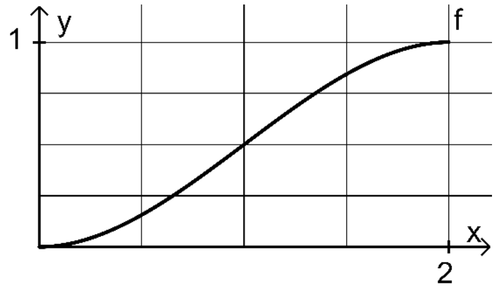


Abbildung 1

Berechnen Sie die Eingangswerte, für die
- das Aktivitätsmaß 0,4 überschritten wird,
- die lokale Änderungsrate des Aktivitätsmaßes mit der durchschnittlichen Änderungsrate auf dem Intervall [0 ; 2] übereinstimmt. (12 BE)

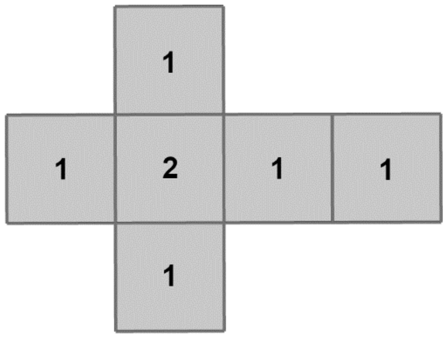
b) Eine Aktivierungsfunktion soll die folgenden Kriterien erfüllen:
- Die Steigung des Funktionsgraphen in der Intervallmitte ist maximal.
- Der Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse im Intervall [0 ; 1] ist kleiner als $\frac{1}{5}$ des Inhalts der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse im gesamten Intervall.

Entscheiden Sie, ob f im Intervall [0 ; 2] diese Kriterien erfüllt, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (8 BE)

c) Unabhängig vom Sachkontext werden nun die auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x^3 - a \cdot x^2 + x$, a > 0, betrachtet. Es gilt $f_a'(x) = 3x^2 - 2a \cdot x + 1$.
Die Gleichung $f_a(x) = 0$ hat in Abhängigkeit von a die Lösungen $x_1 = 0$,
$x_2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}$ und $x_3 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}$.
Bestimmen Sie den Wert von a, für den der Graph von f_a genau zwei Nullstellen hat.
Berechnen Sie den Wert von a, für den x = 2 eine Nullstelle ist.
Bestimmen Sie den Wert von a, für den eine der drei Nullstellen genau in der Mitte zwischen den beiden anderen liegt.
Jeder Graph von f_a, a > 0, hat einen Wendepunkt $\left(\frac{a}{3} \middle| f_a\left(\frac{a}{3}\right)\right)$.
Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, sodass die Tangente an den Graphen von f_a im Wendepunkt die x-Achse unter einem Winkel von 45° schneidet.
(14 BE)

Aufgabe 2A

Ein Würfelspiel wird mit einem Würfel gespielt, dessen Netz in der nebenstehenden Abbildung dargestellt ist.
Der Spieler zahlt einen Einsatz von 3 € und würfelt dann zweimal. Anschließend wird ihm die Summe der beiden gewürfelten Zahlen in € ausgezahlt.



a) Die Zufallsgröße X beschreibt den Betrag in €, der an den Spieler ausgezahlt wird.
Begründen Sie, dass X nur die Werte 2, 3 und 4 annehmen kann.

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Geben Sie ein Ereignis an, das bezüglich dieser Verteilung mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{26}{36}$ eintritt.

Ein Spiel heißt fair, wenn die Einsätze und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgeglichen sind.
Untersuchen Sie, ob das Spiel fair ist.

Berechnen Sie den Zahlenwert, mit dem die „2"-Seitenfläche des Würfels überklebt werden muss, damit das Spiel bei einem Einsatz von 5 € fair ist. (11 BE)

b) Es wird 10-mal mit dem oben abgebildeten Würfel gespielt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei mindestens 2 Spielen 4 € ausgezahlt werden.

Geben Sie die Bedeutung des Terms $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{10}$ im Sachzusammenhang an. (6 BE)

Aufgabe 2B

Eine Süßwarenfabrik stellt Pralinen her.

a) Die Tabelle zeigt Daten von Maschine A und Maschine B:

Pralinenmasse in Gramm	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	9,1
Maschine A: Absolute Häufigkeit	1	3	6	11	16	13	7	2	1
Maschine B: Absolute Häufigkeit	1	1	6	13	16	15	7	0	1

Geben Sie für Maschine A das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Pralinenmasse an.

Begründen Sie ohne Berechnung des arithmetischen Mittels für Maschine B, dass die arithmetischen Mittel für Maschine A und B gleich sind.

(4 BE)

b) Beschädigte Pralinen werden als Pralinen 2. Wahl angeboten. Ihr Anteil beträgt bei Maschine A 18 %.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 150 hergestellten Pralinen höchstens 20 Pralinen 2. Wahl sind.

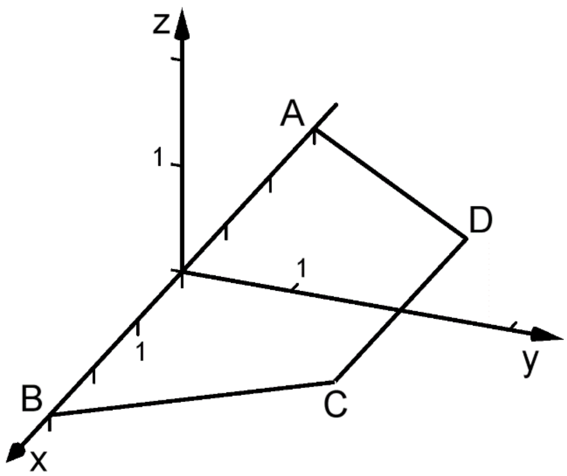
Berechnen Sie die Anzahl der Pralinen, die mindestens entnommen werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Praline 2. Wahl zu erhalten, größer ist als die Wahrscheinlichkeit, keine Praline 2. Wahl zu erhalten.

Für Maschine B nimmt der Hersteller an, dass der Anteil, mit dem Pralinen 2. Wahl hergestellt werden, nur bei 11 % liegt. Eine Stichprobe hat ergeben, dass 42 von 300 Pralinen 2. Wahl sind.
Untersuchen Sie mithilfe eines Vertrauensintervalls zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 %, ob die Annahme des Herstellers auf der Basis dieser Stichprobe angezweifelt werden sollte.

(13 BE)

Aufgabe 3A

Eine Pyramide mit viereckiger Grundfläche hat die Eckpunkte $A(-3|0|0)$, $B(3|0|0)$, $C(1{,}5|2|0)$, $D(-1{,}5|2|0)$ und $S(0|2|2)$.



a) Stellen Sie die Pyramide im Koordinatensystem der Abbildung grafisch dar.
Begründen Sie, dass das Dreieck SCD gleichschenklig ist. (5 BE)

b) Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$, verläuft durch den Punkt A und schneidet die Pyramidenkante $\overline{CS}$.
Berechnen Sie den Winkel, den die Gerade g mit der Grundfläche ABCD der Pyramide einschließt.
Berechnen Sie, in welchem Verhältnis die Gerade g die Pyramidenkante $\overline{CS}$ teilt.
(7 BE)

c) Betrachtet werden Pyramiden mit der Grundfläche ABCD, bei denen die Pyramidenspitze in Abhängigkeit von k durch $S_k\left(0 \,\middle|\, 4 - \frac{4}{5}k \,\middle|\, \frac{4}{5}k\right)$ beschrieben werden kann.
Untersuchen Sie, ob es Pyramiden gibt, bei denen das Dreieck ABS_k am Punkt S_k rechtwinklig ist. (5 BE)

Aufgabe 3B

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, und

die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass

- der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E ist.
- $S(1|1|-4)$ der einzige gemeinsame Punkt von g und E ist.

Die Ebene H hat die Gleichung 3x + 2y + z = 3. E und H schneiden aus der Geraden g eine Strecke heraus.
Bestimmen Sie die Länge dieser Strecke. (10 BE)

b) Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Ebene F durch die Gleichung 3x + 2y + (2 + a)·z = 3a + 4 gegeben.
Berechnen Sie einen Wert für a, sodass der Punkt $P(0|0|2{,}5)$ der Schnittpunkt von F mit der z-Achse ist.
Untersuchen Sie, ob es zu jedem Punkt Z der z-Achse einen Wert für a gibt, sodass Z der Schnittpunkt von F mit der z-Achse ist.
(7 BE)