Hinweise für Lehrkräfte

Die Angaben zu Hilfsmitteln, Aufgabenauswahl und Gewichtung im Wahlteil sind den folgenden Hinweisen zu entnehmen, die auch die Prüflinge erhalten:

Hinweise zum Wahlteil

Im Wahlteil sind 94 Bewertungseinheiten (BE) von insgesamt 120 BE erreichbar.

Am Ende jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten angegeben.

Auswahl der Aufgaben

- Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (46 BE)	Block 2 Stochastik (24 BE)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (24 BE)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

- **Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.**

  Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

- Auswahlzeit: 30 Minuten
- Bearbeitungszeit: 240 Minuten

Hilfsmittel für den Wahlteil

1. Zeichenmittel
2. eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung

Aufgabe 1A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	Markieren der Zeitpunkte auf der x-Achse.	I	2	
	Die x-Koordinaten der Hochpunkte des Graphen von f entsprechen den Zeitpunkten der maximalen Übertragungsraten. Die x-Koordinaten der Hochpunkte werden bestimmt zu $x_{M1} \approx 0{,}09$ und $x_{M2} \approx 2{,}66$. Es ist $f(x_{M1}) < f(x_{M2})$. Dem Verlauf des Graphen von f entnimmt man weiter, dass auch an den Rändern des Zeitintervalls keine höheren Übertragungsraten vorliegen. Also ist die Übertragungsrate bei etwa $2{,}66\ \text{s}$ am höchsten.	I	5	
	Die Zunahme der Übertragungsrate ist maximal, wenn der Graph von f´ einen Hochpunkt hat. Die x-Koordinate des Hochpunktes wird bestimmt zu $x_W = 2$. Es ist $f'(2) = 5$. Dem graphischen Verlauf entnimmt man, dass $f'(0) = 1$ und $f'(3) < 0$ ist. Also liegen im gesamten Intervall keine größeren Steigungswerte vor. Also ist die Zunahme der Übertragungsrate zum Zeitpunkt 2 s am größten.	I / II	5	
b)	Die übertragene Datenmenge entspricht dem Integral über f im Intervall $[0\,;3]$. Mithilfe der Rechnerfunktionen erhält man: $\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{303}{20}$. Also wird im gesamten Zeitraum die Datenmenge $D = 15{,}15\ \text{Mbit}$ übertragen.	I	3	
	Der Ansatz $\int_0^z f(x)\,dx = 10$ liefert drei Werte. Nur die Lösung z mit $z \approx 2{,}4$ liegt im betrachteten Zeitintervall. Nach ungefähr 2,4 Sekunden wird die Datenmenge 10 Mbit übertragen.	I / II	4	
	Mit dem Term $F(3) - F(0)$ wurde die insgesamt übertragene Datenmenge D berechnet. $\frac{F(3) - F(0)}{3 - 0}$ ist die mittlere Übertragungsrate im gesamten Zeitintervall. Die Lösungen der angegebenen Gleichung geben also im Sachzusammenhang jeweils die Zeitpunkte an, zu denen die mittlere Übertragungsrate der momentanen Übertragungsrate entspricht.	II	4	
c)	Für die gesuchte Geradengleichung der Form $g(x) = a \cdot x + b$ ergibt sich: $a = \frac{f(x_{W2}) - f(x_{W1})}{x_{W2} - x_{W1}} = 1{,}625$ und $b = 2{,}75$ und damit $g(x) = 1{,}625 \cdot x + 2{,}75$. Aus dem Ansatz $g(x) = f(x)$ ergeben sich neben den Wendestellen x_{W1} und x_{W2} die weiteren Schnittstellen x_3 und x_4 mit $x_3 \approx -0{,}43$ und $x_4 \approx 2{,}93$. Für die Flächeninhalte erhält man $A_l = \int_{x_3}^{x_{W1}} (f(x) - g(x))\,dx \approx 0{,}76$ und $A_r = \int_{x_{W2}}^{x_4} (f(x) - g(x))\,dx \approx 0{,}76$. Beide Flächeninhalte sind also etwa gleich groß.	II	7	

Fortsetzung Aufgabe 1A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
	k bewirkt eine Streckung des Graphen von f parallel zur y-Achse. Dabei werden alle Funktionswerte von f mit k multipliziert. Die Schnittstellen der Graphen mit den zugehörigen Geraden durch die Wendepunkte bleiben von der Streckung unbeeinflusst. Alle Funktionswerte der Gerade g werden mit k multipliziert, d. h. die Geraden g_k durch die Wendepunkte der Graphen von $k \cdot f(x)$ werden durch $g_k(x) = k \cdot g(x)$ beschrieben. Es folgt: $\int (k \cdot f(x) - g_k(x))\, dx = \int (k \cdot f(x) - k \cdot g(x))\, dx = k \cdot \int (f(x) - g(x))\, dx$. Es werden also die Flächeninhalte aller eingeschlossenen Flächen mit k multipliziert. Damit folgt: $k \cdot A_l = k \cdot A_r$. Also bleibt das Verhältnis der Flächeninhalte bei der Streckung erhalten.	II / III	6	
d)	Es ist $s_c''(x) = -12 \cdot x^2 + 2 \cdot c$ und $s_c'''(x) = -24 \cdot x$. Es ist $s_c''\left(\sqrt{\frac{c}{6}}\right) = 0$. Da $s_c'''\left(\sqrt{\frac{c}{6}}\right) \neq 0$ ist, ist $\sqrt{\frac{c}{6}}$ für jeden Wert von c Wendestelle. Für jeden Wert von c haben die Graphen zu s_c wegen ihrer Symmetrie zwei Wendepunkte, die auf dem Graphen von w liegen. Da der Punkt $(0\,\vert\,0)$ auf jedem Graphen liegt, hat der Graph jeder Funktion aus s_c mit dem Graphen von w drei gemeinsame Punkte.	II	4	
	Die Ausschnitte der Ableitungsgraphen in Abbildung 3 zeigen einen gemeinsamen Punkt $(0\,\vert\,0)$ und einen zweiten Schnittpunkt im ersten Quadranten. Im Punkt $(0\,\vert\,0)$ stimmen also die Steigungen aller Graphen überein und der Punkt $(0\,\vert\,0)$ liegt auf jedem Graphen. Also ist er ein gemeinsamer Punkt aller Graphen, in dem die Tangenten jeweils parallel sind. Der Schnittpunkt der Graphen von w' und s_c' im ersten Quadranten weist auf je einen Punkt auf den Graphen von w und von s_c hin, in denen die zugehörigen Tangenten parallel sind. Diese Punkte sind verschieden, da der Punkt auf dem Graphen von w ein Wendepunkt des Graphen von s_c sein muss. Der Punkt auf dem Graphen von s_c ist jedoch kein Wendepunkt, da der Graph von s_c' dort keinen Hochpunkt hat. Da alle Ableitungen vom Grad 3 und die zugehörigen Graphen somit symmetrisch zum Punkt $(0\,\vert\,0)$ sind, existiert ein dritter Schnittpunkt im dritten Quadranten. Für diesen gilt die Begründung analog zur Begründung für den Schnittpunkt im ersten Quadranten.	II / III	6	
	Summe:		**46**	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Aufgabe 1B

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	$a(0)=5\,;\,a(10)\approx 13{,}59$ Zu Beginn beträgt die Bakterienanzahl 5 ME, nach 10 Stunden etwa 13,6 ME.	I	3	
	Der Ansatz $a(t)=100$ hat die Lösung t_1 mit $t_1\approx 29{,}96$. Nach etwa 30 Stunden ist die Bakterienanzahl auf 100 ME gewachsen.	I	3	
	Die erste Ableitung gibt die momentane Wachstumsgeschwindigkeit an. Aus dem Ansatz $a'(t)=20$ folgt t_2 mit $t_2\approx 36{,}89$. Da die Funktion a exponentiell wächst, ist die momentane Wachstumsgeschwindigkeit frühestens nach 37 Stunden größer als 20 $\frac{\text{ME}}{\text{h}}$.	I / II	4	
	$a'(10)$ gibt die momentane Wachstumsgeschwindigkeit nach 10 Stunden an. Der Term $\frac{a(11)-a(t)}{11-t}$ beschreibt die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit im Intervall $[t\,;11]$. Mit der Gleichung wird ein Zeitpunkt $t<11$ so berechnet, dass im Intervall $[t\,;11]$ die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit mit der momentanen nach 10 Stunden übereinstimmt.	II	4	
b)	Die Bakterienanzahl nimmt zu dem Zeitpunkt am stärksten zu, zu dem der Graph von b', der Ableitung von b, einen Hochpunkt besitzt. Die t-Koordinate des Hochpunktes des Graphen von b' ist t_3 mit $t_3=0$. Die Bakterienanzahl wächst zum Zeitpunkt 0 am stärksten.	I / II	4	
	Der Unterschied der Bakterienanzahlen ist maximal, wenn der Betrag der Differenzfunktion $\text{diff}(t)$ mit $\text{diff}(t)=b(t)-a(t)$ ein Maximum hat. Der Hochpunkt des Graphen von $\text{diff}(t)$ ist $H(t_3\,\vert\,\text{diff}(t_3))$ mit $t_3\approx 2{,}79$ und $\text{diff}(t_3)\approx 0{,}87$. Die Werte an den Rändern des Intervalls sind $\text{diff}(0)=0$ und $\text{diff}(6)\approx -1{,}03$. Also ist der Unterschied der Bakterienanzahlen nach 6 Stunden am größten.	I / II	4	
	Die Beschreibung der Bakterienanzahl nach der Funktion a ist auf lange Sicht unrealistisch, da die Bakterienanzahl dann unbeschränkt wachsen würde. Die Funktion b sagt auf lange Sicht eine Abnahme der Bakterienzahl voraus. Für die weitere Analyse des Wachstums nach Funktion b wird eine Beurteilung erwartet, die zu einer schlüssigen Annahme oder Ablehnung des Modells führt. Die Beurteilung kann folgende Aspekte berücksichtigen: • Möglichkeit der Existenz von nicht diskreten Bakterienanzahlen oder von Bruchteilen von Bakterienanzahlen in ME, • Möglichkeit des Aussterbens von Bakterien.	II	4	

Fortsetzung Aufgabe 1B

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
c)	Die Interpretation der Eigenschaften von p für die Bakterienzahl muss folgende Aspekte darlegen: **Der Graph von p (Parabel)** – **Die Bakterienanzahl** hat zwei Nullstellen. – beträgt zu diesen beiden Zeitpunkten 5 ME. hat bei t_{Max} als Scheitelpunkt einen Hochpunkt oberhalb der t-Achse. – ist zum Zeitpunkt t_{Max} maximal. ist auf dem Intervall zwischen den Nullstellen symmetrisch zu einer Senkrechten zur t-Achse durch den Hochpunkt. – ist für $t \neq t_{Max}$ zu unendlich vielen Paaren von Zeitpunkten innerhalb dieses Zeitraums jeweils gleich groß.	II	6	
d)	Für $r > s$ ist $r - s > 0$. Somit ist wegen $c(t) > 0$ auch die momentane Wachstumsgeschwindigkeit c' immer positiv. Deshalb nimmt die Bakterienanzahl im Modell C zu.	II	2	
	Die Struktur der Differentialgleichung im Modell D stimmt mit derjenigen eines logistischen Wachstums überein. Da aber in der Differenz $r - s \cdot t$ der Parameter s konstant ist, beschreibt das Produkt $s \cdot t$ eine linear wachsende Funktion. Folglich wächst die Bakterienanzahl d(t) nicht logistisch und die Differentialgleichung im Modell D beschreibt kein logistisches Wachstum.	II / III	4	
	Im Modell C ist das Verhältnis von momentaner Wachstumsgeschwindigkeit c' und Bakterienanzahl c gegeben durch $\frac{c'(t)}{c(t)} = r - s$. Da dieser Term konstant ist, gehört Graph I zum Modell C. Die Wachstumsintensität ist im Modell D entsprechend $\frac{d'(t)}{d(t)} = (r - s \cdot t)$. Da dieser Term für $s > 0$ linear fallend ist, gehört Graph III zu Modell D.	II / III	4	
	Im Modell D ist die Nullstelle der Wachstumsintensität auch eine Nullstelle der ersten Ableitung d'. An dieser Nullstelle wechselt die Wachstumsintensität und wegen $d(t) > 0$ auch d' ihr Vorzeichen vom Positiven ins Negative. Deshalb ist die Bakterienanzahl im Modell D zu diesem Zeitpunkt maximal.	III	4	
	Summe:		**46**	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Aufgabe 2A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	Aus der Tabelle ergibt sich für den Anteil ein Wert von 48 %. Mithilfe der Tabelle ergibt sich der Bereich: ab 32,0 min und weniger als 57,5 min.	I	3	
	$38{,}5\cdot 0{,}08+48{,}25\cdot 0{,}17+54{,}5\cdot 0{,}26+60{,}5\cdot 0{,}26+66{,}75\cdot 0{,}14+76{,}5\cdot 0{,}08$ $+89{,}75\cdot 0{,}01=57{,}545$ Der arithmetische Mittelwert der in Klassen zusammengefassten Zeiten beträgt ungefähr 57,5 min.	I / II	3	
b)	Mit $57{,}5-9{,}42=48{,}08$ und $57{,}5+9{,}42=66{,}92$ ergibt sich, dass die Grenzen der $1\sigma-$Umgebung in den Klassen III und VI liegen.	I	2	
	Mit $\Phi_{\mu;\sigma}$ als Verteilungsfunktion der Normalverteilung mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ ergibt sich $P(X\leq 55)=\Phi_{57,5;9,42}(55)\approx 0{,}395$. Der Anteil der Teilnehmenden beträgt ungefähr 39,5 %.	I	2	
	Der gesuchte Anteil der Teilnehmenden ist durch den Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Dichtefunktion und der x-Achse für $50\leq X\leq 65$ gegeben. Anhand der Beschriftungen der Achsen erkennt man, dass 4 Kästchen einem Anteil von 10 % entsprechen. Bestimmt man für $50\leq X\leq 65$ näherungsweise die Anzahl der Kästchen zwischen dem Graphen der Dichtefunktion und der x-Achse, so zählt man 20 ganze Kästchen. Die Reststücke im Intervall bilden zusammen mehr als zwei weitere Kästchen, sodass der Flächeninhalt insgesamt mehr als 22 Kästchen umfasst. Damit beträgt der gesuchte Anteil mehr als 55 %.	II	4	
	Die Skizze des Graphen muss folgende Eigenschaften verdeutlichen: • Der Graph ist symmetrisch zur Vertikalen durch seinen Hochpunkt und nähert sich asymptotisch der x-Achse. • Der Hochpunkt des Graphen liegt mit gleicher x-Koordinate unter dem Hochpunkt des schon vorhandenen Graphen. • Der Graph verläuft im linken Bereich oberhalb, im mittleren Bereich unterhalb und im rechten Bereich wieder oberhalb des schon vorhandenen Graphen.	II	3	
c)	Für $\mu>5$ und $\sigma=1$ liegen die Werte von Y für die Bereiche $-2\leq Y\leq -1$ und $1\leq Y\leq 2$ jeweils außerhalb der $3\,\sigma$-Umgebung um μ. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Werte außerhalb der $3\,\sigma$-Umgebung um μ liegen, ist nahe null. Deshalb ist auch die Summe $P(-2\leq Y\leq -1)+P(1\leq Y\leq 2)$ nahe bei null.	II / III	3	
	Die zugehörige Zufallsgröße ist wegen der x-Koordinate des Tiefpunktes T mit $\mu=0$ und unbekanntem σ normalverteilt. Aufgrund der Symmetrie der Verteilung der Zufallsgröße und der Symmetrie der Lage der Intervalle $[-2\,;-1]$ und $[1\,;2]$ zu $\mu=0$, reicht es, Werte für σ mit $\int_1^2 \varphi_{0;\sigma}(x)\,dx=0{,}1$ zu finden. Mithilfe der Rechnerfunktionen erhält man z. B. die Lösung σ_1 mit $\sigma_1\approx 0{,}80$. Alternativ kann auch die Lösung σ_2 mit $\sigma_2\approx 3{,}66$ gefunden werden.	II / III	4	
	Summe:		**24**	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Aufgabe 2B

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ___________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	i: Patient infiziert, $\overline{i}$: Patient nicht infiziert, p: Ergebnis positiv, n: Ergebnis negativ. Die drei ersten Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm sind $P(\overline{i}) = 0{,}95$, $P(p\,\|\,i) = 0{,}92$ und $P(n\,\|\,\overline{i}) = 0{,}98$. Die Wahrscheinlichkeiten am Ende des Baumdiagramms sind $P(i \cap p) = 0{,}046$, $P(i \cap n) = 0{,}004$, $P(\overline{i} \cap p) = 0{,}019$ und $P(\overline{i} \cap p) = 0{,}931$.	I	4	
	Die zu zeigenden Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus den Quotienten $P(C) = \frac{P(i \cap p)}{P(p)} = \frac{0{,}046}{0{,}065} \approx 0{,}708$ und $P(D) = \frac{P(\overline{i} \cap n)}{P(n)} = \frac{0{,}931}{0{,}935} \approx 0{,}996$.	I / II	3	
	Da P(D) sehr groß ist, kann nahezu ausgeschlossen werden, dass ein Patient infiziert ist, wenn das Ergebnis negativ war. Allerdings ist es in etwa 30% der Fälle möglich, dass ein Patient mit positivem Ergebnis nicht infiziert ist, ein positives Ergebnis ist also nicht sehr aussagekräftig.	I / II	2	
b)	Mithilfe der Fortsetzung des Baumdiagramms bei einem positiven ersten Ergebnis folgt für die Fälle mit doppelt positivem Ergebnis $P(i \cap pp) = 0{,}046 \cdot 0{,}92 = 0{,}04232$ und $P(\overline{i} \cap pp) = 0{,}019 \cdot 0{,}02 = 0{,}00038$ sowie für deren Summe $P(pp) = 0{,}0427$. Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch den Quotienten $\frac{P(i \cap pp)}{P(pp)} = \frac{0{,}04232}{0{,}0427} \approx 0{,}991$. Diese liegt wie gefordert über 99%.	II	5	
c)	$P(G) = P(\overline{i} \cap p) + P(i \cap n) = 0{,}019 + 0{,}004 = 0{,}023$. P(G) beträgt also $2{,}3\%$.	I / II	2	
	P(A) und P(B) sind bedingte Wahrscheinlichkeiten, die Anteile von infizierten oder von nicht infizierten Patienten sind. P(G) bezieht sich demgegenüber auf die Gesamtheit aller Patienten.	I / II	2	
	$P_I(G) = a \cdot 0{,}08 \cdot x + (1-a) \cdot 0{,}02$; $P_{II}(G) = a \cdot 0{,}08 + (1-a) \cdot 0{,}02 \cdot x$.	II / III	3	
	Die Variante I ist besser geeignet als Variante II, wenn $P_I(G)$ kleiner ist als $P_{II}(G)$. Man kann einen beliebigen festen Wert für x mit $0 \le x < 1$ wählen. Setzt man einen Wert für a mit $0{,}2 < a \le 1$ in die Terme ein, folgt: $P_I(G) < P_{II}(G)$. Analog ergibt sich für einen Wert von a mit $0 \le a < 0{,}2$: $P_I(G) > P_{II}(G)$. Folglich ist die Variante I für Anteile von über 20 % infizierter Patienten in Krankenhäusern besser geeignet.	II / III	3	
	Summe:		**24**	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Aufgabe 3A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	$\left\|\overrightarrow{ES}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{5} \approx 2{,}24$. Die Zeltstange zwischen den Punkten E und S ist ungefähr 2,24 m lang.	I	2	
	Die Bodenfläche setzt sich zusammen aus dem Rechteck ABCD und dem Dreieck ADE. ABCD ist ein Rechteck, da alle vier Kanten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Das Dreieck ADE hat die Grundseite $\overline{AD}$ und als Höhe den Abstand von E zu $\overline{AD}$. Da alle Punkte in der xy-Ebene liegen, können die entsprechenden Streckenlängen aus den Koordinaten der Punkte entnommen werden. Damit ergibt sich: $A_{Rechteck} = 2 \cdot 2 = 4$ und $A_{Dreieck} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$. Die Bodenfläche des Zeltes hat einen Inhalt von 5 m^2.	I	3	
	Die xy-Ebene hat als Normalenvektor z. B. $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Für den Normalenvektor $\overrightarrow{n_2}$ der Ebene, die von den Punkten A, E und S aufgespannt wird, gilt $\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{n_2} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$ und $\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{n_2} \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = 0$. Damit erhält man z. B. $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$. Für den Schnittwinkel α der beiden Ebenen gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\left\|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right\|}{\left\|\overrightarrow{n_1}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{n_2}\right\|} = \frac{1}{3}$ und somit $\alpha \approx 70{,}5^\circ$. Die Größe des Schnittwinkels beträgt etwa $70{,}5^\circ$.	I / II	6	
	Die durch A und B sowie S und T verlaufenden Geraden sind parallel zueinander, da $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \overrightarrow{ST}$. Durch zwei zueinander parallele Geraden ist eine Ebene eindeutig festgelegt. Die Punkt A, B, S und T liegen also in einer Ebene.	I / II	3	

Fortsetzung Aufgabe 3A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
b)	F liegt in der von den Punkten D, E und S aufgespannten Ebene und in der xy-Ebene, also auf der Geraden k durch D und E mit $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man erhält deshalb für F allgemein $F(1+r \mid -r \mid 0)$.	II	2	
	Mit $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor der xy-Ebene ist r so zu bestimmen, dass $\sin(45^\circ) = \frac{\lvert \overrightarrow{FS} \cdot \overrightarrow{n_1} \rvert}{\lvert \overrightarrow{FS} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{n_1} \rvert}$ gilt. Mit $\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+r \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \\ 1+r \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich die Gleichung $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{r^2 + (1+r)^2 + 4}}$ mit den Lösungen r_1 mit $r_1 \approx -1{,}82$ und r_2 mit $r_2 \approx 0{,}82$. Damit erhält man näherungsweise die beiden Punkte $F_1(-0{,}82 \mid 1{,}82 \mid 0)$ und $F_2(1{,}82 \mid -0{,}82 \mid 0)$. Anhand der Abbildung erkennt man wegen der positiven x-Koordinate, dass F_2 der gesuchte Punkt ist. Mit $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{AE}$ wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Da F_2 auf der Geraden k mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{DE}$ liegt, entspricht der Abstand d von F_2 zur Kante AE dem Abstand von F_2 zu E. Somit erhält man $d = \lvert \overrightarrow{EF_2} \rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} 0{,}82 \\ -0{,}82 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert \approx 1{,}16$. Der Abstand des Befestigungspunktes F zur Kante AE beträgt etwa $1{,}16\ \text{m}$.	II / III	8	
	Summe:		**24**	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Aufgabe 3B

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	$A(4\|0\|0)$, $C(0\|4\|0)$, $F(4\|4\|4)$, $H(0\|0\|4)$	I	2	
	$\left\|\overrightarrow{HF}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}\right\| \approx 5{,}66$ Die Länge der Kante HF beträgt etwa $5{,}66$.	I	2	
	Alle Kanten der Pyramide sind Diagonalen der quadratischen Seitenflächen des Würfels und müssen daher gleich lang sein.	I	2	
	Für eine zu K parallele Ebene durch B gilt: $\left(\vec{x} - \overrightarrow{OB}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$. Eine mögliche Darstellung ist somit $x + y - z = 8$.	II	2	
	Für die Bestimmung des Schnittwinkels zwischen der Seitenfläche ACH und der Ebene K wird der Schnittwinkel der zugehörigen Normalenvektoren der entsprechenden Ebenen durch die Seitenfläche bzw. Ebene genutzt. Zu der Ebene durch die Punkte A, C und H mit $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$ ist ein möglicher Normalenvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Mit dem Normalenvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ der Ebene K erhält man $\cos(\alpha) = \dfrac{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}$ und damit $\alpha \approx 70{,}5^\circ$. Die Seitenfläche ACH und die Ebene K schließen einen Winkel von etwa $70{,}5^\circ$ ein.	I / II	4	

Fortsetzung Aufgabe 3B

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
b)	Der Würfel begrenzt mit der dreiseitigen Pyramide ACFH vier weitere dreiseitige Pyramiden. Da diese jeweils durch eine Seitenfläche der Pyramide ACFH und drei Würfelkanten begrenzt werden, haben diese vier alle gleiches Volumen. Der Würfel hat ein Volumen von $V_W = 4^3 = 64$. Die dreiseitige Pyramide ABCF hat ein Volumen von $V_{ABCF} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\right) \cdot 4 = \frac{64}{6}$. Das Volumen der Pyramide ACFH kann über die Differenz $V_T = V_W - 4 \cdot V_{ABCF}$ bestimmt werden und beträgt somit: $V_T = 64 - 4 \cdot \frac{64}{6} = \frac{64}{3}$. Damit ist das Volumen der Pyramide ACFH doppelt so groß wie das einer der anderen durch den Würfel eingeschlossenen Pyramiden.	II	5	
	Die Gerade g kann beschrieben werden durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$. Sie ist orthogonal zu K, da der Richtungsvektor der Geraden mit dem Normalenvektor von K übereinstimmt. Durch Einsetzen von g in K ergibt sich $t = \frac{8}{3}$ und somit erhält man $Q\left(\frac{8}{3} \middle| \frac{8}{3} \middle| \frac{4}{3}\right)$. Die Gerade g ist Höhengerade der Pyramiden ACFH und ACFP zur Grundfläche ACF. Der Punkt Q ist dabei der Fußpunkt der jeweiligen Höhe. Damit die Pyramide ACFP ein k-faches Volumen der Pyramide ACFH hat, muss die Höhe der Pyramide ACFP die k-fache Länge der Höhe der Pyramide ACFH haben, der Punkt P auf g also in k-facher Entfernung von Q liegen. Mit $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH}$ ergibt sich aus $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ für $t = -\frac{8}{3}$ ein Fall, sodass die Volumen gleich sind. Also erhält man mit $t = -\frac{8}{3} \cdot k$ einen Punkt P für k-faches Volumen. Damit ergibt sich $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} - \frac{8}{3} \cdot k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \cdot (1-k) \\ \frac{8}{3} \cdot (1-k) \\ \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + k\right) \end{pmatrix}$. Ein möglicher Punkt P ist damit $P\left(\frac{8}{3} \cdot (1-k) \middle| \frac{8}{3} \cdot (1-k) \middle| \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + k\right)\right)$.	II / III	7	
	Summe:		**24**	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Zum **Erwartungshorizont**:

Der Erwartungshorizont skizziert mögliche Lösungswege. Je nach gewähltem Lösungsansatz sind häufig auch alternative Bearbeitungen der Aufgabenstellungen denkbar, die bei fachlicher Richtigkeit und angemessener Berücksichtigung der Operatoren mit entsprechenden Bewertungseinheiten zu bewerten sind.
Die rechts stehenden Bewertungseinheiten sind jedoch verbindlich. Bei der Korrektur, Bewertung und Beurteilung sind die Bemerkungen gemäß der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife vom 18.10.2012 (Abschnitt 3.2.1.3 Bewertung der Prüfungsleistung) zu beachten.

Werden mindestens 75 % der Bewertungseinheiten erreicht, so ist davon auszugehen, dass Leistungen in allen drei Anforderungsbereichen erbracht worden sind.
Werden mindestens 45 % der Bewertungseinheiten erreicht, so ist davon auszugehen, dass Leistungen über den Anforderungsbereich I hinaus erbracht worden sind.

Folgender **Bewertungsmaßstab** ist bezogen auf die Gesamtzahl von 120 BE anzuwenden:

Ab Prozent	**95**	**90**	**85**	**80**	**75**	**70**	**65**	**60**	**55**	**50**	**45**	**40**	**33**	**27**	**20**	**00**
Punkte	**15**	**14**	**13**	**12**	**11**	**10**	**09**	**08**	**07**	**06**	**05**	**04**	**03**	**02**	**01**	**00**

Bezug der Wahlaufgaben zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards:

Wahl-aufgabe			Leitidee						Allgemeine mathematische Kompetenzen					
			L1	L2	L3	L4	L5		K1	K2	K3	K4	K5	K6
1A	a		X			X					X	X	X	X
	b		X	X		X					X	X	X	X
	c		X	X		X			X	X			X	X
	d		X	X		X			X	X			X	X
1B	a		X	X		X			X	X		X	X	
	b		X	X		X			X	X	X	X	X	X
	c		X	X		X			X	X	X	X	X	X
	d		X	X		X			X	X	X	X	X	X
2A	a			X			X					X	X	
	b			X		X	X		X	X	X	X	X	X
	c		X	X		X	X		X	X		X	X	X
2B	a						X		X		X	X	X	
	b						X			X	X	X	X	X
	c						X		X	X	X	X		X
3A	a		X	X	X				X			X	X	
	b		X	X	X				X	X		X	X	X
3B	a			X	X				X	X		X	X	X
	b			X	X				X	X		X	X	X