Hinweise zum Wahlteil

Im Wahlteil sind 94 Bewertungseinheiten (BE) von insgesamt 120 BE erreichbar.

Am Ende jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten angegeben.

Auswahl der Aufgaben

- Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (46 BE)	Block 2 Stochastik (24 BE)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (24 BE)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

- **Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.**

  Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

- Auswahlzeit: 30 Minuten
- Bearbeitungszeit: 240 Minuten

Hilfsmittel für den Wahlteil

1. Zeichenmittel
2. eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung

Aufgabe 1A

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^4 + 5 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.
Im Folgenden wird ein Übertragungsvorgang einer Datenmenge aus dem Internet betrachtet. In den ersten drei Sekunden wird die Übertragungsrate modellhaft mithilfe der Funktion f beschrieben.
Dabei ist x die Zeit in Sekunden seit Beginn der Übertragung und f(x) die Übertragungsrate in Megabit pro Sekunde $\left(\frac{\text{Mbit}}{\text{s}}\right)$.
Die Abbildung 1 der Anlage zeigt den Graphen von f für $0 \le x \le 3$.

a) Markieren Sie in der Abbildung 1 auf der Zeitachse die Zeitpunkte, zu denen die Übertragungsrate nach der Modellfunktion f etwa $3{,}5\,\frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$ beträgt.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt mit der größten Übertragungsrate.

Begründen Sie, dass zum Zeitpunkt 2 s die Zunahme der Übertragungsrate am größten ist. (12 BE)

b) Berechnen Sie die Datenmenge D, die insgesamt im betrachteten Zeitraum übertragen wird.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem eine Datenmenge von 10 Mbit übertragen wurde.

F bezeichne eine Stammfunktion zur Funktion f.
Erläutern Sie die Bedeutung der Lösungen folgender Gleichung im Sachzusammenhang:
$\frac{F(3) - F(0)}{3 - 0} = f(x)$. (11 BE)

c) Unabhängig vom Sachzusammenhang wird die Funktion f nun für alle $x \in \mathbb{R}$ betrachtet.

Der Graph von f hat die Wendepunkte $W_1(0{,}5 \mid f(0{,}5))$ und $W_2(2 \mid f(2))$.
Die Gerade g durch die Wendepunkte schließt mit dem Graphen von f drei Flächen ein.
Abbildung 2 der Anlage veranschaulicht die Situation.
Vergleichen Sie die Inhalte der beiden äußeren Flächen.

Betrachtet wird nun der Graph zu $k \cdot f(x)$, $k > 0$, und die Gerade durch die Wendepunkte des Graphen zu $k \cdot f(x)$. Beide schließen wiederum drei Flächen ein.
Untersuchen Sie den Einfluss des Faktors k auf das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden äußeren Flächen. (13 BE)

d) Betrachtet wird nun die Funktionenschar s_c mit $s_c(x) = -x^4 + c \cdot x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

Zeigen Sie, dass jeder Graph der Schar s_c die Wendestelle $x = \sqrt{\frac{c}{6}}$ hat.

Die Wendepunkte der Graphen von s_c liegen auf dem Graphen der Funktion w mit
$w(x) = 5 \cdot x^4$, $x \in \mathbb{R}$.
Die Abbildung 3 der Anlage zeigt einen Ausschnitt aus dem Graphen der Ableitungsfunktion w' sowie aus dem Graphen der Ableitungsfunktion $s_c{}'$ für einen beliebigen Wert von c.
Begründen Sie mithilfe von Abbildung 3 die Gültigkeit folgender Aussage:
Jeder Graph der Schar s_c hat mit dem Graphen von w drei gemeinsame Punkte und nur für einen dieser Punkte gilt, dass die Tangenten an den Graphen von s_c und an den Graphen von w identisch sind. (10 BE)

Fortsetzung Aufgabe 1A

Material

Anlage

Graph zu den Teilaufgaben a) und b)

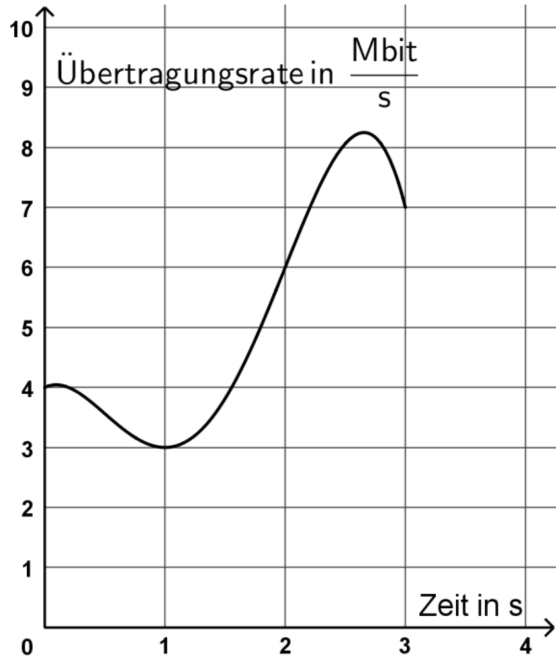


Abbildung 1: Graph von f für $0 \le x \le 3$

Graphen zu Teilaufgabe c)

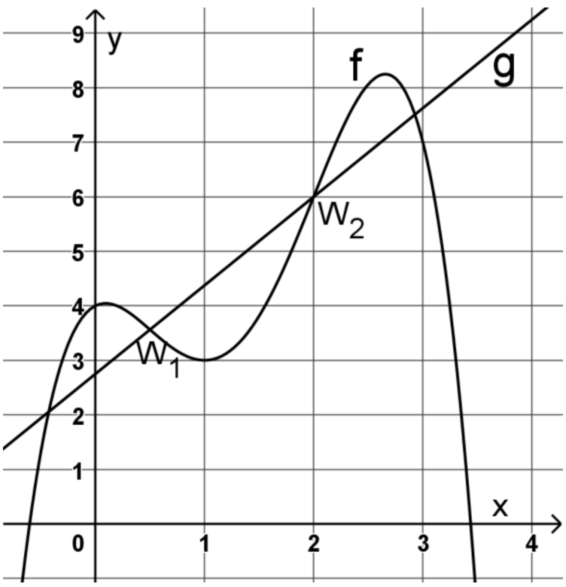


Abbildung 2: Graph von f und Gerade g durch die Wendepunkte

Fortsetzung Aufgabe 1A

Graphen zu Teilaufgabe d)

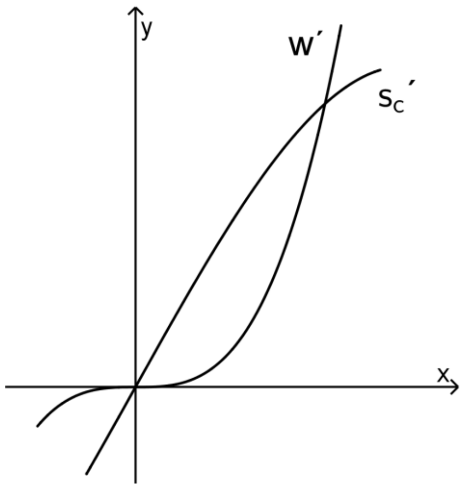


Abbildung 3: Ausschnitte aus dem Graphen von w' und aus dem Graphen von $s_c{}'$ für einen beliebigen Wert von c

Aufgabe 1B

Die Entwicklung einer Bakterienart soll mit verschiedenen Modellen untersucht werden.
Dabei beschreibt jeweils t die Zeit in Stunden (h) nach Beobachtungsbeginn und die Funktion die Bakterienanzahl in Mengeneinheiten (ME).

Im Modell A beschreibt die Funktion a mit $a(t) = 5 \cdot e^{0,1 \cdot t}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, die Bakterienanzahl.

a) Berechnen Sie im Modell A
- die Bakterienanzahl zu Beginn und nach 10 Stunden,
- den Zeitpunkt, zu dem die Bakterienanzahl auf 100 ME angewachsen ist,
- auf Stunden genau den frühesten Zeitpunkt, zu dem die momentane Wachstumsgeschwindigkeit größer als 20 $\frac{\text{ME}}{\text{h}}$ ist.

Gegeben ist die Gleichung $\frac{a(11) - a(t)}{11 - t} = a'(10)$.
Erläutern Sie die Bedeutung der Lösung für t mit $t < 11$ im Sachzusammenhang. (14 BE)

Im Modell B beschreibt die Funktion b mit $b(t) = 5 \cdot e^{0,2 \cdot t - 0,02 \cdot t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, die Bakterienanzahl.

Ohne Nachweis können Sie verwenden, dass gilt: $b'(t) = (1 - 0,2 \cdot t) \cdot e^{0,2 \cdot t - 0,02 \cdot t^2}$.

b) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Bakterienanzahl im Modell B am stärksten wächst.

Untersuchen Sie, zu welchem Zeitpunkt t mit $0 \leq t \leq 6$ der Unterschied der Bakterienanzahlen nach beiden Modellen am größten ist.

Beurteilen Sie die Eignung der beiden Funktionen a und b im Hinblick auf die Beschreibung der Bakterienanzahl auf lange Sicht. (12 BE)

c) Die Funktion p mit $p(t) = -0,02 \cdot t^2 + 0,2 \cdot t$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, stellt den Exponenten der Funktion b dar.
Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstellen, der Extremstellen und der Symmetrie des Graphen von p für die Bakterienanzahl im Modell B. (6 BE)

Betrachtet werden nun allgemeine Differentialgleichungen für Modelle C und D mit den Parametern r und s.

Modell C: $c'(t) = (r - s) \cdot c(t)$ mit $c(t) > 0$.

Modell D: $d'(t) = (r - s \cdot t) \cdot d(t)$ mit $d(t) > 0$, jeweils $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $r > 0$, $s > 0$.

d) Begründen Sie mithilfe der Differentialgleichung, dass die Bakterienanzahl nach Modell C zunimmt, wenn gilt: $r > s$.

Begründen Sie, dass die Differentialgleichung im Modell D kein logistisches Wachstum einer Bakterienanzahl beschreibt.

Die Wachstumsintensität ist das Verhältnis aus momentaner Wachstumsgeschwindigkeit und Bakterienanzahl zu jedem Zeitpunkt.
Die Graphen in der Abbildung der Anlage stellen die zeitlichen Entwicklungen von Wachstumsintensitäten dar.
Entscheiden Sie, welcher Graph zum Modell C und welcher zum Modell D gehört.

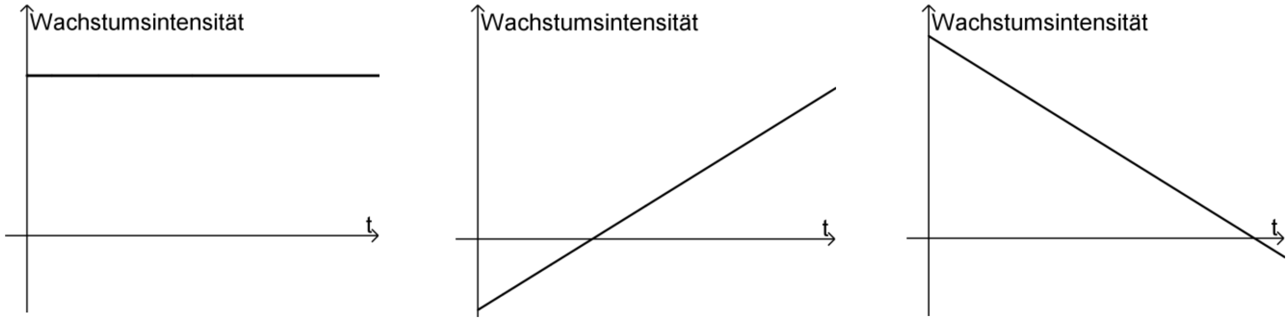
Interpretieren Sie im Modell D die Bedeutung der Nullstelle der Wachstumsintensität für die Bakterienanzahl. (14 BE)

Fortsetzung Aufgabe 1B

Material

Anlage

Graphen zu Teilaufgabe d)



I II III

Abbildung: Graphen verschiedener Wachstumsintensitäten

Aufgabe 2A

Bei einem 10 km-Lauf in Hannover wurden für 1879 Teilnehmende die Zeiten in Minuten (min) gemessen. Die Tabelle in der Anlage stellt eine zugehörige Häufigkeitsverteilung der Zeiten in Klassen dar.

a) Geben Sie mithilfe der Tabelle den Anteil der Teilnehmenden an, deren Zeit einer der Klassen V, VI oder VII angehört.

Geben Sie einen möglichen Zeitbereich an, in dem 51 % aller gemessenen Zeiten liegen.

Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert der in Klassen zusammengefassten Zeiten. (6 BE)

b) Die Zufallsgröße X beschreibt die gemessenen Zeiten des 10 km-Laufs. Im Folgenden wird angenommen, dass X normalverteilt ist mit $\mu = 57{,}5\text{ min}$ und $\sigma = 9{,}42\text{ min}$.

Bestimmen Sie die Klassen, in denen die Grenzen der $1\sigma-$Umgebung um den Erwartungswert liegen.

Berechnen Sie den Anteil der Teilnehmenden, deren gemessene Zeit höchstens 55 Minuten beträgt.

In der Abbildung 1 der Anlage ist der Graph der Dichtefunktion der Zufallsgröße X dargestellt.
Begründen Sie allein mithilfe der Abbildung 1, dass für mehr als 55 % der Teilnehmenden die gemessene Zeit zwischen 50 und 65 Minuten liegt.

Für einen anderen 10 km-Lauf in Hannover beträgt der Erwartungswert der gemessenen Zeiten zwar ebenfalls $\mu = 57{,}5$ min, die zugehörige Standardabweichung ist aber größer als 9,42 min.
Skizzieren Sie in Abbildung 1 für diesen Lauf einen typischen Graphen der zugehörigen Dichtefunktion. (11 BE)

c) Unabhängig vom Sachzusammenhang wird eine normalverteilte Zufallsgröße Y mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung $\sigma = 1$ betrachtet. In der Abbildung 2 der Anlage ist der Graph einer Funktion W_1 zu sehen, die für $\sigma = 1$ für jeden Erwartungswert μ die Wahrscheinlichkeit $W_1(\mu) = P(-2 \le Y \le -1) + P(1 \le Y \le 2)$ angibt.

Begründen Sie, dass die Funktionswerte von W_1 für $\mu > 5$ nahe bei null liegen.

Für einen anderen Wert von σ hat der Tiefpunkt T des Graphen von W_σ die Koordinaten $T(0\,|\,0{,}2)$.
Bestimmen Sie mithilfe dieser Informationen einen möglichen Wert der Standardabweichung σ. (7 BE)

Fortsetzung Aufgabe 2A

Material

Anlage

Tabelle zu den Teilaufgaben a) und b)

Klasse	Bereich der gemessenen Zeit in Minuten	Häufigkeit in Prozent	Klassenmitte in Minuten
I	ab 18,5 und weniger als 32,0	0	25,25
II	ab 32,0 und weniger als 45,0	8	38,5
III	ab 45,0 und weniger als 51,5	17	48,25
IV	ab 51,5 und weniger als 57,5	26	54,5
V	ab 57,5 und weniger als 63,5	26	60,5
VI	ab 63,5 und weniger als 70,0	14	66,75
VII	ab 70,0 und weniger als 83,0	8	76,5
VIII	ab 83,0 und weniger als 96,5	1	89,75

Tabelle: Häufigkeitsverteilung der gemessenen Zeiten beim 10 km-Lauf und deren Klassenmitten

Graph zu Teilaufgabe b)

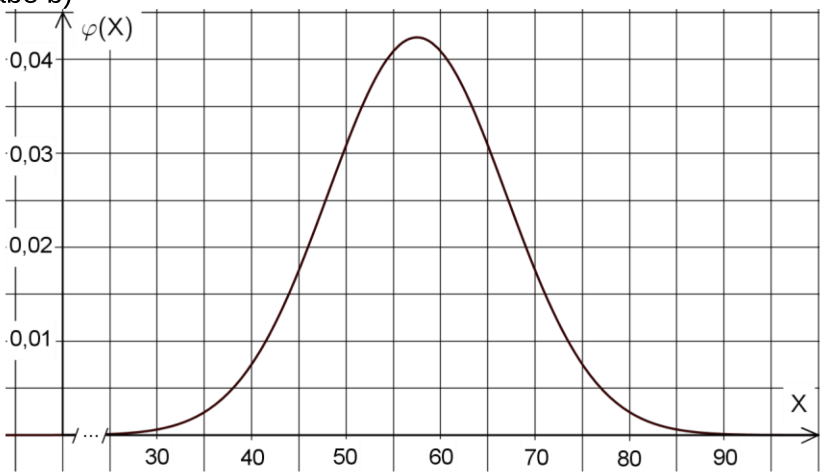


Abbildung 1: Graph der Dichtefunktion der Zufallsgröße X

Graph zu Teilaufgabe c)

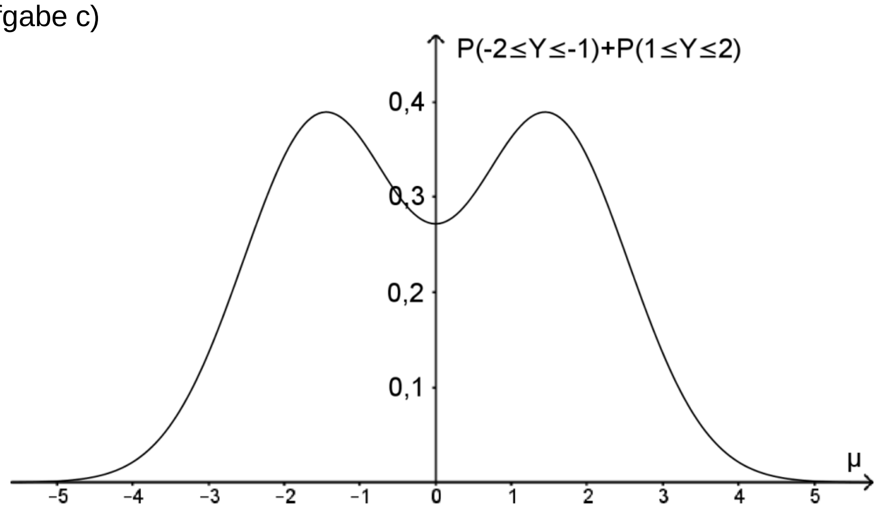


Abbildung 2: Wahrscheinlichkeit $W_1(\mu)$ in Abhängigkeit vom Erwartungswert μ

Aufgabe 2B

Alle Patienten eines Krankenhauses müssen sich aufgrund von Verdachtsfällen einem Schnelltest zur Erkennung des Norovirus unterziehen. Man schätzt, dass bereits 5 % der Patienten infiziert sind.
Ein positives Testergebnis bedeutet, dass ein Patient als infiziert eingestuft wird.
Ein negatives Testergebnis bedeutet, dass ein Patient als nicht infiziert eingestuft wird.
In Schnelltests treten die folgenden Fehler auf:
A: Ein infizierter Patient erhält ein negatives Testergebnis.
B: Ein nicht infizierter Patient erhält ein positives Testergebnis.
Im vorliegenden Schnelltest gilt: $P(A) = 0{,}08$; $P(B) = 0{,}02$.

a) Geben Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm in der Abbildung an.

Betrachtet werden nun die Ereignisse C und D.
C: Wenn ein Patient ein positives Testergebnis erhält, ist er infiziert.
D: Wenn ein Patient ein negatives Testergebnis erhält, ist er nicht infiziert.
Zeigen Sie: P(C) beträgt etwa $70{,}8\,\%$ und P(D) etwa $99{,}6\,\%$.

Erläutern Sie auf Grundlage dieser beiden Wahrscheinlichkeiten, wie aussagekräftig ein positives und wie aussagekräftig ein negatives Testergebnis für den Patienten ist. (9 BE)

b) Erhält ein Patient ein positives Testergebnis, wird der Test wiederholt. Dadurch soll die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Patient infiziert ist, wenn er zwei positive Testergebnisse erhält, über $99\,\%$ betragen.

Untersuchen Sie, ob dieses Ziel durch die Wiederholung des Tests erreicht wird. (5 BE)

c) Das Ereignis G, dass ein beliebiger Patient ein falsches Testergebnis erhält, nennt man Gesamtfehler des Tests.
Berechnen Sie P(G) beim Test aus Teilaufgabe a).

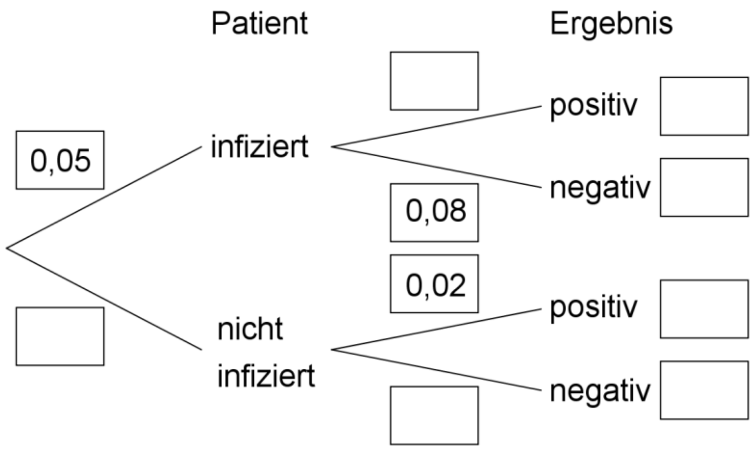
Erläutern Sie im Sachzusammenhang, dass P(G) nicht die Summe von P(A) und P(B) ist.

Ein Hersteller entwickelt zwei neue Tests, bei denen P(G) geringer als im alten Test ist:

- In Variante I wird nur P(A) auf den Anteil $x \cdot 0{,}08$ reduziert.
- In Variante II wird nur P(B) auf den Anteil $x \cdot 0{,}02$ reduziert.

In verschiedenen Krankenhäusern gibt es unterschiedliche Anteile a infizierter Patienten.
Geben Sie je einen Term für P(G) in Variante I und in Variante II an.

Unabhängig von x ist P(G) bei beiden Varianten für $a = 0{,}2$ gleich groß.
Untersuchen Sie, für welche Anteile infizierter Patienten in Krankenhäusern die Variante I besser geeignet ist. (10 BE)



Aufgabe 3A

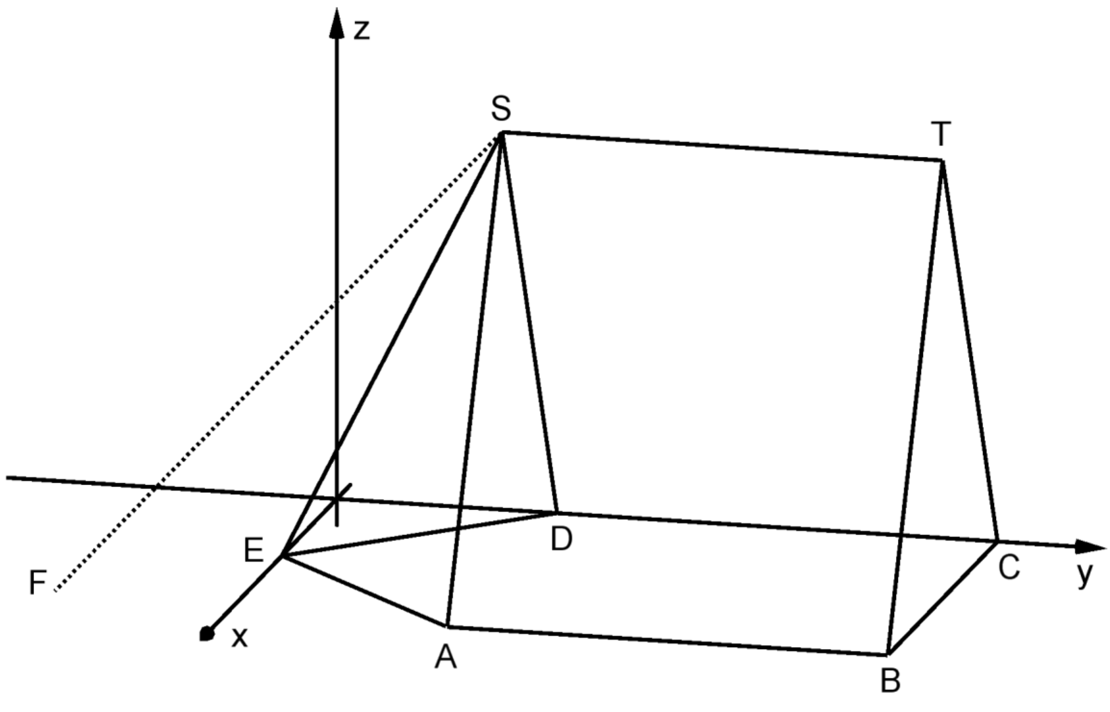
Die Abbildung zeigt modellhaft den Entwurf eines Zeltes mit den Punkten $A(2|1|0)$, $B(2|3|0)$, $C(0|3|0)$, $D(0|1|0)$, $E(1|0|0)$, $S(1|1|2)$ und $T(1|3|2)$. Alle Koordinaten sind in der Einheit Meter angegeben.

a) Berechnen Sie
- die Länge der Zeltstange zwischen den Punkten E und S,
- den Inhalt der Bodenfläche ABCDE des Zeltes,
- die Größe des Schnittwinkels, den die Zeltfläche, die durch die Punkte A, E und S aufgespannt wird, mit der Bodenfläche in der xy-Ebene bildet.

Begründen Sie, dass die Punkte A, B, S und T in einer Ebene liegen. (14 BE)

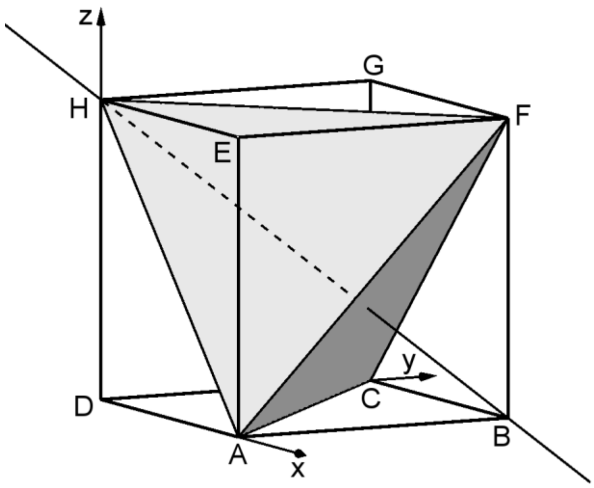
b) Eine im Punkt S befestigte Spannleine wird entsprechend der Abbildung so gespannt, dass sie in der von den Punkten D, E und S aufgespannten Ebene liegt. Der Befestigungspunkt F der Spannleine liegt im durch die xy-Ebene dargestellten Boden.

Der Winkel zwischen Spannleine und Boden ist 45° groß.
Berechnen Sie den Abstand des Befestigungspunktes F zur Kante AE. (10 BE)



Aufgabe 3B

Gegeben ist ein Würfel ABCDEFGH mit $D(0|0|0)$, $B(4|4|0)$ und $H(0|0|4)$. In dem Würfel wird die dreiseitige Pyramide ACFH betrachtet. Die Ebene K mit $x + y - z = 4$ wird durch die Punkte A, C und F festgelegt.



a) Geben Sie die Koordinaten aller Eckpunkte der dreiseitigen Pyramide an.

Berechnen Sie die Länge der Kante HF.

Begründen Sie, dass alle Kanten der Pyramide die gleiche Länge haben.

Bestimmen Sie eine Gleichung in Koordinatenform einer zu K parallelen Ebene, die den Punkt B enthält.

Bestimmen Sie den Winkel, den die Seitenfläche ACH der Pyramide und die Ebene K miteinander einschließen. (12 BE)

b) Der Würfel begrenzt mit der Pyramide ACFH vier dreiseitige Pyramiden.
Begründen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussage:
Das Volumen der Pyramide ACFH ist doppelt so groß wie das Volumen jeder der vier anderen eingeschlossenen dreiseitigen Pyramiden.

Die Gerade g ist durch die Punkte B und H festgelegt. P ist ein beliebiger Punkt auf g.
Berechnen Sie die Koordinaten eines Punktes P in Abhängigkeit von k für $k > 0$ so, dass die Pyramide ACFP das k-fache Volumen der Pyramide ACFH hat. (12 BE)